Μαθημα 9º 29/3/2017

Τοπολογια

$E = V$ διανυσματικος χωρος

$\rho(x,y) = \|x-y\|$, $(V, \|\ \|)$ χωρος διαν. με νορμα (ή σταθμη)

Ασκηση

Αν $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθιες πραγματικων αριθμων με $p_\nu, q_\nu \in \mathbb{R}$ και $(\vec{a}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $(\vec{b}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθιες πραγματικων του $E = V$, $\vec{a}, \vec{b} \in E$. Τοτε

$p_\nu \xrightarrow{\mathbb{R}} p$, $q_\nu \xrightarrow{\mathbb{R}} q$, $\vec{a}_\nu \xrightarrow{\rho} a$, $\vec{b}_\nu \xrightarrow{\rho} b$

$p_\nu \vec{a}_\nu + q_\nu \vec{b}_\nu \longrightarrow p\vec{a} + q\vec{b}$

Λυση

$\vec{a}_\nu \in V = E$, $p_\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow p_\nu \vec{a}_\nu \in V$

$q_\nu \vec{b}_\nu \in V \Rightarrow p_\nu \vec{a}_\nu + q_\nu \vec{b}_\nu \in V$

$\xrightarrow{\rho} p\vec{a} + q\vec{b}$

1º βημα: $p_\nu \vec{a}_\nu \xrightarrow{\rho} p\vec{a}$

$$\rho(p_\nu \vec{a}_\nu, p\vec{a}) = \|p_\nu \vec{a}_\nu - p\vec{a}\| = \|(p_\nu \vec{a}_\nu - p_\nu \vec{a}) + (p_\nu \vec{a} - p\vec{a})\| \leq$$
$$\leq \|p_\nu \vec{a}_\nu - p_\nu \vec{a}\| + \|p_\nu \vec{a} - p\vec{a}\| = \|p_\nu(\vec{a}_\nu - \vec{a})\| + \|(p_\nu - p)\vec{a}\| =$$
$$= |p_\nu| \cdot \|\vec{a}_\nu - \vec{a}\| + |p_\nu - p|\,\|\vec{a}\| \underset{*}{\leq} M\,\|\vec{a}_\nu - \vec{a}\| + |p_\nu - p| \cdot \|\vec{a}\| \to 0$$

$*$ $p_\nu \to p \Rightarrow \exists M > 0 : |p_\nu| \leq M$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_\nu \in V,\ \forall \nu \in \mathbb{N} : \vec{a}_\nu \to \vec{a} \\ \vec{b}_\nu \in V,\ \forall \nu \in \mathbb{N} : \vec{b}_\nu \to \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \to \vec{a} + \vec{b}$$

Αν δειξω αυτο το λημμα ↑ τοτε ειμαι εντάξει.

$$\rho(\vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu, \vec{a} + \vec{b}) = \|(\vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu) - (\vec{a} + \vec{b})\| = \|(\vec{a}_\nu - \vec{a}) + (\vec{b}_\nu - \vec{b})\| \leq \ldots$$
$$\leq \|\vec{a}_\nu - \vec{a}\| + \|\vec{b}_\nu - \vec{b}\| \to 0$$

Ορισμος Δινεται η ακολουθια $(a_\nu)_{\nu\in N}$ στον μετρικο χωρο (E,ρ).
Η $(b_\mu)_{\mu\in M}$ λεγεται **υπακολουθια** της $(a_\nu)_{\nu\in N}$ αν $\exists\, k: M\to N$ γν. αυξουσα συναρτηση με $b_\mu = a_{k_\mu}$, $\forall \mu\in M$

Π.χ $(a_\nu)_{\nu\in N=\mathbb{N}}$

$(b_\mu)_{\mu\in M=\mathbb{N}}$, $b_\mu = a_{k_\mu}$

$k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $k(j)=2j$

$M\to N$ $\quad b_j = a_{k_j} = a_{2j}$

Π.χ

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $a_\nu = \frac{1}{\nu}$ και $a_{3\nu}=\frac{1}{3\nu}$

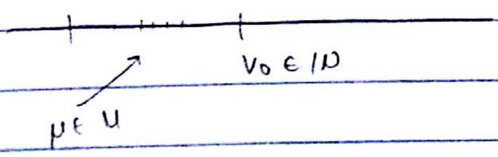
$(a_{3\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ υπακολουθια της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

Προταση
$(a_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθια στον μ.χ (E,ρ) και $\ell\in E$. αν $a_\nu \xrightarrow{\rho} \ell$ και $(b_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθια της $(a_\nu)_\nu$ τοτε $b_\mu\xrightarrow{\rho}\ell$

Αποδειξη
Θα δειξω οτι $b_\mu \xrightarrow[\mu\in M]{\rho} \ell \iff \underbrace{\rho(b_\mu,\ell)\xrightarrow[\mu\in M]{} 0}_{(1)}$

$a_\nu\xrightarrow{\rho}\ell \Rightarrow \rho(a_\nu,\ell)\to 0 \Rightarrow [\forall\varepsilon>0: \exists \nu_0\in N: \rho(a_\nu,\ell)<\varepsilon \ \forall \nu\ge\nu_0]$ (2)
Θελουμε να αποδειξουμε την (1), αν $\varepsilon>0$ αρκει να βρουμε ενα $\mu_0\in M$
$\forall \mu\ge\mu_0$ $\rho(b_\mu,\ell)<\varepsilon$ $\forall\mu\in M$
Εφοσον $(b_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθια της $(a_\nu)_{\nu\in N}$ $\Rightarrow \exists\, k: M\to N$ γν. αυξ. ωστε
$b_\mu = a_{k(\mu)} = a_{k_\mu}$
Αν βρουμε ενα $\mu_0\in M$ $\forall \mu\ge\mu_0 \Rightarrow \overbrace{k(\mu)}^{=\nu} = k_\mu \ge \nu_0$
$\overset{(2)}{\Rightarrow} \rho(a_\nu,\ell)<\varepsilon \Rightarrow \rho(a_{k(\mu)},\ell)<\varepsilon\Rightarrow\rho(b_\mu,\ell)<\varepsilon$

$k: M\to N$ (γν. αυξ.) $\Leftarrow \exists\, \mu_0\in M : k_{\mu_0}\ge \nu_0$



τοτε αν $\mu\ge\mu_0$

$k_\mu\ge\nu_0$

$k_\mu\ge k_{\mu_0}\ge\nu_0$

Πρόταση

Δίνεται στον μ.χ (E,ρ) η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ και $l \in E$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. $\exists$ υπακολουθία $(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ της $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ώστε $\beta_\mu \to l$
2. $\forall\, U(l)$ περιοχή του l, $\exists$ άπειροι $\nu \in N$, $a_\nu \in U(l)$

Απόδειξη

$(1 \Rightarrow 2)$

$\beta_\mu \xrightarrow[\mu\in M]{} l \Rightarrow \forall\, U(l)$ περιοχή του l: $\exists\, \mu_0 \in M$: $\overbrace{\beta_\mu}^{=a_{\kappa(\mu)}} \in U(l)$, $\forall \mu \geq \mu_0$, $\mu \in M$

$\kappa : M \to N$ γν. αύξ

Θεωρούμε το σύνολο $S = \{\kappa(\mu) : \mu \in M, \kappa \geq \mu_0\} \subset N$

S άπειρο $\subset N$

Αν $\nu_1 \in S \Rightarrow \nu_1 = \kappa(\mu)$ για κάποιο $\mu \in M$, $\mu \geq \mu_0$

$a_{\nu_1} = a_{\kappa(\mu)} \in U(l)$ $(\forall \nu_1 \in S)$

Άρα $\forall \nu_1 \in S$ άπειρο $\subset N$, $a_{\nu_1} \in U(l)$

$(2 \Rightarrow 1)$

Έστω $l \in E$. Θεωρούμε την περιοχή $U(l) = B(l,1)$

Υπόθεση (2) $\Rightarrow \exists$ άπειροι $\nu \in N$: $a_\nu \in B(l,1)$

Διαλέγω ένα, έστω $n_1 \in N$: $a_{n_1} \in B(l,1)$

Εφαρμόζω πάλι το 2 για $U(l) = B(l,1/2)$: $\exists$ άπειροι $\nu \in N$: $a_\nu \in B(l,1/2)$

$\Rightarrow \exists\, n_2 > n_1$: $a_{n_2} \in B(l,1/2)$

$B(l,1/3) \Rightarrow \exists\, n_3 > n_2$: $a_{n_3} \in B(l,1/3)$

Φτιάξαμε μια ακολουθία από στοιχεία του N (επαγωγικά)

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$

ώστε $a_{n_k} \in B(l, 1/k)$ με $\frac{1}{k} \to 0$

Η ακολουθία $(a_{n_k})_{k\in N}$ υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in N}$

$(\kappa : N \to N \quad \kappa(j) = n_j)$

Άσκηση

$(b_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in N}$ (1) $\Big\}\Rightarrow$ $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υπακολουθία
$(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υπακολουθία της $(b_\mu)_{\mu\in M}$ (2) $\quad$ της $(a_\nu)_{\nu\in N}$

Λύση

① $\exists\, \kappa: M \to N$ γν. αύξ. : $b_\mu = a_{\kappa(\mu)} = a_{\kappa_\mu}$ $\forall\, \mu \in M$

② $\exists\, \kappa_1: \Lambda \to M$ γν. αύξ. : $\gamma_\lambda = b_{\kappa_1(\lambda)} = b_{\kappa_\lambda}$, $\forall \lambda \in \Lambda$

$\gamma_\lambda = b_{\kappa(\lambda)} = a_{\kappa(\mu)} = a_{\kappa(\kappa(\lambda))}$ $\quad \mu \in M$, $\lambda \in \Lambda$

$= a_{(\kappa\circ\kappa_1)(\lambda)}$

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[rr, bend right, "\kappa\circ\kappa_1"'] & M \arrow[r, "\kappa"] & N \end{tikzcd}$$

$(a_\nu)_{\nu\in N}$ υπακολουθία του S, $\kappa: N \to N$, $\kappa(\nu) = \nu$

Ορισμός Δίνεται η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ στον μ.χ. (E,ρ) αν $\ell \in E$ είναι τ.ω. $\exists\, (b_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία $b_\mu \xrightarrow[\mu\in M]{} \ell$

τότε το ℓ λέγεται σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ή διαφορετικά υπακολουθιακό

~~* σημείο συσ. $A = \{a_n, n \in N\}$, $\ell \in A'$~~

ℓ υπακολ. όριο της $(a_n)_{n\in N}$,